BAC BLANC : MATHEMATIQUES série ES

Durée : 3 heures ***Utiliser une <u>nouvelle page</u> (pas feuille)***
<u>pour chaque exercice</u>

Calculatrice autorisée

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

<u>EXERCICE 1</u> **4 points**

Commun à tous les candidats

Lors d'une opération promotionnelle, un magasin d'électroménager propose deux modèles de téléviseurs : un modèle A et un modèle B. On s'intéresse aux acheteurs qui profitent de cette promotion.

- 70 % des acheteurs choisissent un téléviseur de modèle A.

Pour ces deux modèles de téléviseurs, le magasin propose une extension de garantie de 5 ans.

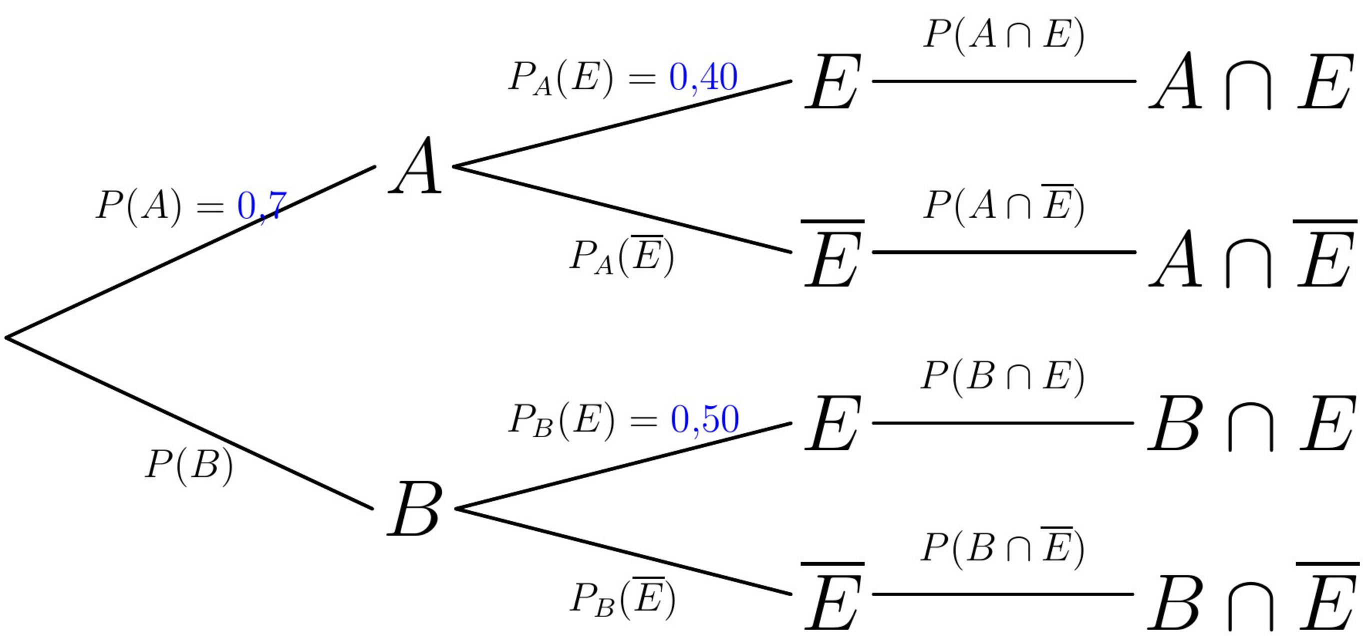
- 40 % des acheteurs du téléviseur de modèle A choisissent l'extension de garantie et 50 % des acheteurs du téléviseur de modèle B choisissent cette extension.

On interroge au hasard un acheteur à la sortie du magasin.

Dans tout l'exercice, donner des valeurs approchées des résultats au millième. On note :

- A l'événement « Un acheteur choisit le téléviseur de modèle A » ;
- B l'événement « Un acheteur choisit le téléviseur de modèle B » ;
- E l'événement « Un acheteur choisit l'extension de garantie »,
- On note p(A) la probabilité de l'événement A.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.



2. Calculer la probabilité qu'un acheteur choisisse le modèle A avec l'extension de garantie.

$P(A \cap E) = P(A) \times P_A(E) = 0,70 \times 0,40 = \underline{0,28}$

3. Montrer que p(E) = 0,43.

$P(E) = \underline{P(A \cap E) + P(B \cap E)}$

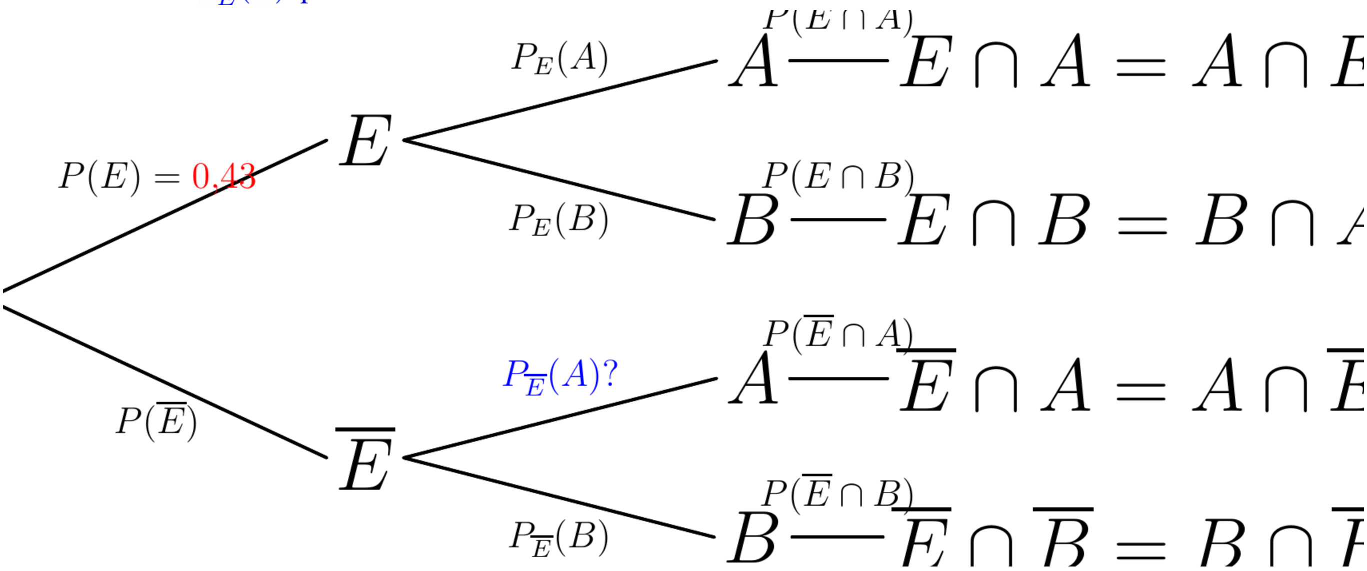
avec $P(A \cap E) = \underline{0,28}$ et $P(B \cap E) = P(B) \times P_B(E) = 0,30 \times 0,50 = \underline{0,15}$

(on calcule d'abord $P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,7 = \underline{0,3}$)

donc $P(E) = 0,28 + 0,15 = \underline{0,43}$

4. Un acheteur n'a pas pris l'extension de garantie, calculer la probabilité qu'il ait acheté le modèle A.

Il faut calculer $P_{\overline{E}}(A)$ qui se trouve sur le deuxième arbre.



On calcule donc :

- $P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0,43 = \underline{0,57}$
- $P(\overline{E} \cap A) = P(A \cap \overline{E}) = P(A) \times P_A(\overline{E}) = 0,70 \times 0,60 = \underline{0,42}$ d'après le 1er arbre (avec $P_A(\overline{E}) = 1 - P_A(E) = 1 - 0,40 = \underline{0,60}$)
- le deuxième arbre permet d'écrire :

$$\begin{aligned} P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(A) &= P(\overline{E} \cap A) \\ 0,72 \times P_{\overline{E}}(A) &= 0,42 \\ P_{\overline{E}}(A) &= \frac{0,42}{0,57} = \underline{0,737} \end{aligned}$$

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une retenue d'eau artificielle contient 100 000 m³ d'eau le 1er juillet 2013 au matin. La chaleur provoque dans la retenue une évaporation de 4% du volume total de l'eau par jour. De plus, chaque soir, on doit libérer de la retenue 500 m³ pour l'irrigation des cultures aux alentours.

Cette situation peut être modélisée par une suite (u_n).

Le premier juillet 2013 au matin, le volume d'eau en m³ est $u_0 = 100\ 000$.

Pour tout entier naturel n supérieur à 0, u_n désigne le volume d'eau en m³ au matin du n-ième jour qui suit le 1er juillet 2013.

1. **a.** Justifier que le volume d'eau u_1 au matin du 2 juillet 2013 est égal à 95 500 m³ .

On a une évolution (-4%, donc multiplication par 0,96) suivi d'une soustraction de 500 donc $u_1 = 100\ 000 \times 0,96 - 500 = \underline{95\ 500}$

b. Déterminer le volume d'eau u_2, au matin du 3 juillet 2013.

On a une évolution (-4%, donc multiplication par 0,96) suivi d'une soustraction de 500 donc $u_2 = \underline{95\ 500} \times 0,96 - 500 = \underline{91\ 180}$

c. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0,96u_n - 500$.

On a pour calculer u_{n+1} une évolution (-4%, donc multiplication de u_n par 0,96) suivi d'une soustraction de 500 donc $u_{n+1} = \underline{u_n \times 0,96 - 500}$

2. Pour déterminer à quelle date la retenue ne contiendra plus d'eau, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1	**Variables :**	u est un nombre réel
L2		$n$est un entier naturel
L3	**Traitement :**	Affecter à u la valeur 100 000
L4		Affecter à n la valeur 0
L5		Tant que $u > 0$
L6		Affecter à n la valeur ...
L7		Affecter à u la valeur ...
L8		Fin Tant que
L9	**Sortie :**	Afficher ...

L6 : Affecter à n la valeur $\underline{n+1}$

L7 : Affecter à u la valeur $\underline{u \times 0,96 - 500}$

L9 : Afficher $\underline{n}$

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 12\ 500$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,96. Préciser son premier terme.

Il faut donc montrer que $v_{n+1} \stackrel{?}{=} 0,96 \times v_n$.

On exprime $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 12\ 500 \\ &= \underbrace{0,96 \times u_n - 500}_{u_{n+1} \text{ voir Q 1c}} + 12\ 500 \\ &= \underline{0,96 \times u_n + 12000} \end{aligned}$$	On exprime $$\begin{aligned} 0,96 \times v_n &= 0,96 \times (u_n + 12\ 500) \\ &= 0,96 \times u_n + 0,96 \times 12\ 500 \\ &= \underline{0,96 \times u_n + 12000} \end{aligned}$$

Donc $v_{n+1} = 0,96 \times v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \underline{0,96}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 12\ 500 = \underline{112\ 500}$

b. Exprimer v_n en fonction de n.

On en déduit que $v_n = v_0 \times q^n = \underline{112\ 500 \times 0,96^n}$

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 112\ 500 \times 0,96^n - 12\ 500$.

Comme $v_n = u_n + 12\ 500$ alors $u_n = v_n - 12\ 500 = \underline{112\ 500 \times 0,96^n - 12500}$

4. **a.** A l'aide de la calculatrice et du tableau de valeur, trouver la valeur de n telle que $112\ 500 \times 0,96n - 12\ 500 \leqslant 0$.

On trouve $u_{53} \approx 427,9 \underline{> 0}$ et $u_{54} \approx -89,2 \underline{< 0}$, donc la valeur recherchée est $\underline{n = 54}$

b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Cela signifie que <u>le réservoir sera vide au matin du 54ème jour</u>.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $f(x) = (2x - 5)e^{-x+4} + 20$.

Partie A

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0; 10]$, $f'(x) = (-2x + 7)e^{-x+4}$.

On remarque que $f(x) = (2x - 5)\times e^{-x+4} + 20$ est du type $u\times v + 20$ avec

$$\left|\begin{array}{ll} u = 2x - 5 & v = e^{-x+4} \\ u' = 2 & v' = -1 \times e^{-x+4} \end{array}\right. \text{ donc } \begin{aligned} f'(x) &= u'v + uv' + 0 \text{ (derivee de 20)} \\ &= 2 \times e^{-x+4} + (2x - 5) \times (-1) \times e^{-x+4} \\ &= [2 + (2x - 5) \times (-1)]e^{-x+4} \\ &= (2 - 2x + 5)e^{-x+4} \\ &= \underline{(-2x + 7)e^{-x+4}} \end{aligned}$$

2. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0; 10]$. Si nécessaire, arrondir au millième les valeurs présentes dans le tableau de variation.

$$\text{On a } \begin{aligned} -2x + 7 &= 0 \\ -2x &= -7 \\ x &= \frac{-7}{-2} = \underline{3,5} \end{aligned} \quad \text{donc}$$

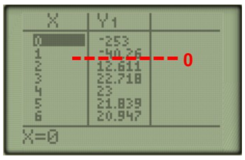
x	0		$\frac{7}{2} = 3,5$		10
$-2x+7$	(signe de a)	$+$	0	$-$	
e^{-x+4}		$+$		$+$	(fct exponentielle)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-253	$\nearrow$	$\approx 23,297$	$\searrow$	$\approx 20,036$

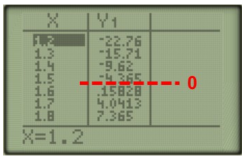
3. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; 10]$ et déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de α (encadrer α à 0,01 près).

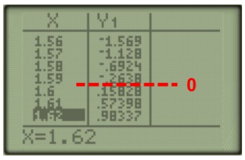
La fonction f est continue (car dérivable) et monotone sur chacun des intervalles $[0; 3,5]$ et $[3,5; 10]$ et :

- $0 \in [f(0); f(3,5)] = [-253; 23,297]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; 3,5]$.
- $0 \notin [f(10); f(3,5)] = [20,036; 23,297]$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[3,5; 10]$.

En résumé, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; 10]$ dont une valeur approchée est encadré par $1,59 < \alpha < 1,60$ (car $f(1,59) < 0$ et $f(1,60) > 0$)



4. On donne la fonction F définie sur $[0; 10]$ par $F(x) = (-2x + 3)e^{-x+4} + 20x$. Montrer que F est une primitive de f sur $[0; 10]$.

Il faut montrer que $F'(x) \stackrel{?}{=} f(x)$.

On remarque que $f(x) = (-2x + 3)\times e^{-x+4} + 20x$. Le premier terme est du type $u\times v$ avec

$$\left|\begin{array}{ll} u = -2x + 3 & v = e^{-x+4} \\ u' = -2 & v' = -1 \times e^{-x+4} \end{array}\right. \text{ donc } \begin{aligned} \underline{F'(x)} &= u'v + uv' + 20 \text{ (derivee de } 20x) \\ &= -2 \times e^{-x+4} + (-2x + 3) \times (-1) \times e^{-x+4} + 20 \\ &= [-2 + (-2x + 3) \times (-1)]e^{-x+4} + 20 \\ &= (-2 + 2x - 3)e^{-x+4} + 20 \\ &= (2x - 5)e^{-x+4} + 20 = \underline{f(x)} \end{aligned}$$

donc F est une primitive de f.

Partie B

Une entreprise fabrique entre 0 et 1 000 objets par semaine.

Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise cette entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets est modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 10] par : $f(x) = (2x-5)e^{-x+4} + 20$.

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la partie A et en arrondissant les résultats à l'unité.

1. Quel est le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximum ? (justifier)

Le nombre d'objets à vendre correspond au maximum de la fonction, donc à $x = 3,5$ (car la dérivée s'annule et change de signe pour $x = 3,5$), c'est à dire 350 objets.

Quel est ce bénéfice maximal en euros ?

Le bénéfice est alors de $f(3,5)$ milliers d'euros, soit environ 3297€.

2. À partir de combien d'objets fabriqués et vendus l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice positif ?

La société réalise un bénéfice lorsque $f(x) > 0$ donc après la valeur α, soit pour le 160ème objet fabriqué.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des situations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;1]$.

x	-3		-1		0		1
Variations de f	-6	↗	-1	↘	-2	↗	4

Proposition 1 : L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-3;1]$.

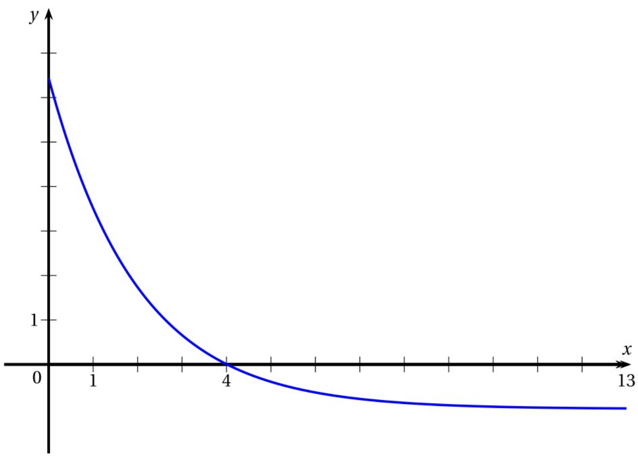
VRAI. La fonction f est continue (car pas de double barre dans le tableau) et monotone sur chacun des intervalles $[-3;-1]$, $[-1;0]$ et $[0;1]$ et :

- $0 \notin [f(-3);f(-1)] = [-6;-1]$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[-3;-1]$.
- $0 \notin [f(0);f(-1)] = [-2;-1]$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[-1;0]$.
- $0 \in [f(0);f(1)] = [-2;4]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0;1]$.

En résumé, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-3;1]$.

Une explication plus succincte est acceptable : on applique le théorème des valeurs intermédiaires sur $[-3;-1]$, $[-1;0]$ et $[0;1]$ (fct continue, monotone et $0 \in [f(a);f(b)]$), donc une unique solution dans l'intervalle $[-3;1]$.

2. On considère une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0;13]$ et on donne ci-contre la courbe représentative de la fonction g', fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0;13]$.



Proposition 2 : La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;4]$.

FAUX, la fonction dérivée est positive sur $[0;4]$ donc la fonction est croissante sur $[0;4]$.

Proposition 3 : La fonction g est concave sur l'intervalle $[0;13]$.

VRAI, La fonction dérivée semble décroissante donc la fonction est concave sur $[0;13]$.

3. Pour une puissance électrique donnée, le tarif réglementé du kilowattheure est passé de 0,1140 € au 01/07/2007 à 0,1372 € au 01/07/2014.

Proposition 4 : Cette augmentation correspond à un taux d'évolution arrondi au centième, chaque année, de :

$\boxed{a}$. 1,72 % $\boxed{b}$. 1,67 % $\boxed{c}$. 2,68 % $\boxed{d}$. 1,33 %

Réponse $\boxed{c}$, De 2007 à 2014, il y a 7 années, donc le taux d'évolution est tel que

$T^7 = \dfrac{0,1372}{0,1140} \approx 1,2035$, or $1,0268^7 \approx 1,2034$.

$$\left(0,1140 \xrightarrow{T} 0,1140 \times T \xrightarrow{T} \begin{array}{c}(0,1140 \times T) \times T \\ = 0,1140 \times T^2\end{array} \xrightarrow{T} \ldots \xrightarrow{T} \ldots \xrightarrow{T} \ldots \xrightarrow{T} \ldots \xrightarrow{T} 0,1372\right)$$

4. la fonction f', dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^{-x}$, a pour expression :

$\boxed{a}$. $(-x-1)e^{-x}$ $\boxed{b}$. $(-2x-3)e^{-x}$ $\boxed{c}$. $(2x+3)e^{-x}$ $\boxed{d}$. $(-2x+1)e^{-x}$

Réponse $\boxed{d}$, On remarque que $f(x) = (2x+1)\times e^{-x}$ est du type $u\times v + 20$ avec

$$\left|\begin{array}{ll} u = 2x+1 & v = e^{-x} \\ u' = 2 & v' = -1 \times e{-}x \end{array}\right. \text{donc} \quad \begin{aligned} f'(x) &= u'v + uv' \\ &= 2 \times e^{-x} + (2x+1) \times (-1) \times e^{-x} \\ &= [2 + (2x+1) \times (-1)]e^{-x} \\ &= (2 - 2x - 1)e^{-x} \\ &= \underline{(-2x+1)e^{-x}} \end{aligned}$$