EXERCICE 1

On considère la fonction définie sur $[-1,5;6]$ par $f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x^2+4x-0,5$.

1) **Justifier** la continuité de la fonction.

C'est une fonction polynôme, elle est dérivable sur $[-1,5;6]$ donc continue.

2) **Étudier** le sens de variation de la fonction. (On donne $f'(1)=f'(2)=0$)

$f'(x)=2x^2-6x+4$, c'est un polynôme du second degré dont les racines sont d'après l'énoncé 1 et 2, $a>0$, on en déduit le signe de f' et le tableau de variation suivant :

x	$-1,5$		1		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-15.5	$\nearrow$	$\approx 1,16$	$\searrow$	$\approx 0,83$	$\nearrow$	59.5

3) On considère l'équation $f(x)=0$. **Justifier** que cette équation a au moins une solution puis **donner** en le justifiant complètement le nombre exact de solutions.

- f est continue sur $[-1,5;6]$; $0\in[f(-1,5);f(6)]$ donc $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $[-1,5;6]$.
- f est continue et monotone sur $[-1,5;1]$; $0\in[f(-1,5);f(1)]$ donc $f(x)=0$ admet une solution unique dans $[-1,5;1]$.
- f est continue et monotone sur $[1;2]$; $0\notin[f(2);f(1)]$ donc $f(x)=0$ n'admet pas de solution unique dans $[1;2]$.
- f est continue et monotone sur $[2;6]$; $0\notin[f(2);f(6)]$ donc $f(x)=0$ n'admet pas de solution unique dans $[2;6]$.
- En conclusion, $f(x)=0$ admet une solution unique dans $[-1,5;6]$.

  Donner en utilisant votre calculatrice la ou les valeur(s) de cette (ces) solution(s) arrondi à 10^{-2}.

$S=\{0,14\}$

EXERCICE 2

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{6}x^3-x^2+x+3$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Sujet ** : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+2x+1$

Conjectures

1) En utilisant votre calculatrice, **conjecturer** la convexité de la fonction f suivant les valeurs de x.

La fonction semble concave sur $]-\infty;2]$ et convexe sur $[2;+\infty[$.

2) **En déduire** par lecture graphique, l'existence d'un point d'inflexion (**justifier**) pour la courbe $\mathcal{C}_f$ et le sens de variation de la dérivée f' de la fonction.

Il y a un changement de convexité (concave puis convexe) en $x=2$ donc la courbe C_f admet un point d'inflexion en $A(2;f(2))$.

Il y a un changement de convexité (concave puis convexe) en $x=2$ donc la fonction dérivée f' doit être décroissante puis croissante.

Démonstration

3) **Calculer** la dérivée f' puis la dérivée seconde f''. **Étudier le signe** de f'', **en déduire** le sens de variation de f' **puis** la convexité de f.

$f'(x)=0,5x^2-2x-1$ et $f''(x)=x-2$. ** : $f'(x)=x^2-4x-2$ **et** $f''(x)=2x-4$

On en déduit le tableau de signe de f'', de variation de f' et de convexité de f suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
$f(x)$		concave	Pt inflexion	convexe	

4) **Indiquer** alors les coordonnées exactes du point d'inflexion.

Le point d'inflexion est $A(2;f(2))=\underline{\left(2;\frac{7}{3}\right)}$. ** : $A(2;f(2))=\underline{\left(2;\frac{-1}{3}\right)}$

EXERCICE 3

On considère la fonction dérivée $f'(x) = 2 + \dfrac{3}{x^2+1}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1) Justifier l'affirmation : f est concave sur $[0; +\infty[$.

Indice : étudier les variations de f'.

x	$0 \qquad\qquad -\infty$
$f''(x)$	$-$
$f'(x)$	$\searrow$
$f(x)$	concave

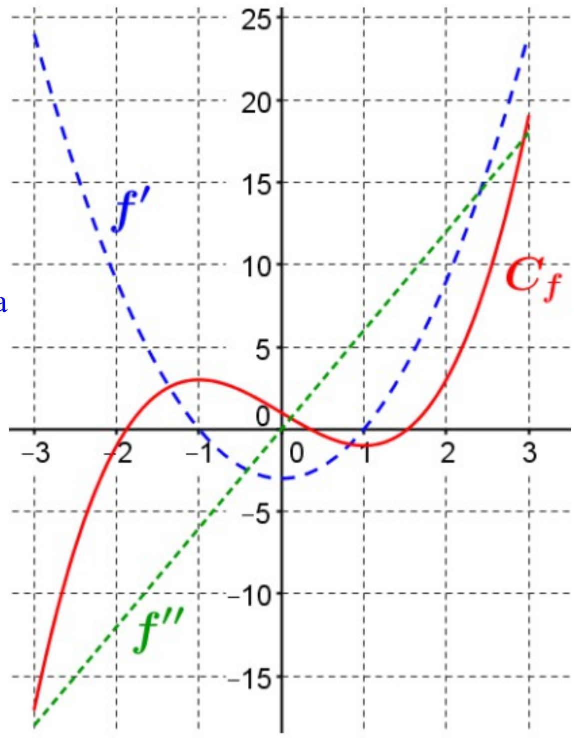
On calcule $f''(x)$:

On a $f'(x) = 2 + \dfrac{3}{x^2} + 1 = 2 + \dfrac{u}{v}$ avec $\left| \begin{array}{ll} u(x) = 3 & v(x) = x^2+1 \\ u'(x) = 0 & v'(x) = 2x \end{array} \right.$

Donc$f''(x) = 0 + \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{0 + 0 \times (x^2+1) - 3 \times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2}$. On en déduit le tableau ci-contre, l'affirmation est alors justifiée : f est concave.

EXERCICE 4 :

On considère la fonction définie sur $[-3; 3]$ par $f(x) = x^3 - 3x$.
Pour chacune des affirmations ci-dessous, **dire** si elle est juste ou fausse *(expliquer : décrire brièvement la méthode à employer, sans faire les calcul)*.



$\boxed{A}$ f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Faux ; f est croissante sur $]-\infty; -1]$ puis décroissante sur $[-1; 1]$ puis croissante sur $[1; +\infty[$; Méthode de démonstration : calculer la dérivée et étudier son signe, en déduire les variations.

$\boxed{B}$ $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en $A(0; 1)$

Vrai ; f semble convexe sur $]-\infty; 0]$ puis concave sur $[1; +\infty[$ et change donc de convexité en $x = 0$ donc $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse 0. Méthode de démonstration : étudier le sens de variation de la fonction dérivée, en déduire l'existence du point d'inflexion ou le changement de convexité de la fonction donc le point d'inflexion.

$\boxed{C}$ f est concave sur $[-1; 1]$

Faux ; f semble convexe sur $[-1; 0]$ puis concave sur $[0; 1]$ Méthode de démonstration : même étude que pour $\boxed{B}$.

$\boxed{D}$ f admet un extremum en $x = -1$

Vrai ; La dérivée semble s'annuler et changer de signe en $x = -1$ et f admettre un maximum en $x = -1$. Méthode de démonstration : on calcule la dérivée et on étudie son signe. Elle s'annule et change de signe en $x = -1$.