Chapitre 2 – continuité et convexité d'une fonction

rappels de notions de première

Mathématiques TES

1. Nombre dérivée et tangente, équation de droite

Dans ce qui suit, on appelle :

- f une fonction définie sur un intervalle I
- $a \in I$
- h , un réel non nul.

Définition — Nombre dérivé et fonction dérivée

- **Si** $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre (réel) noté $f'(a)$ quand h tend vers 0, **alors** f est dérivable en a et son nombre dérivé est $f'(a)$.

Notation : $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$

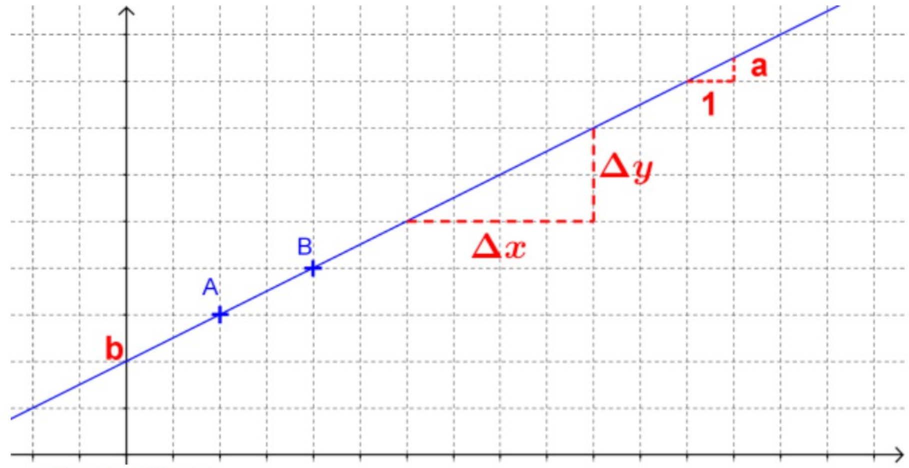
- **Si** pour tout x de I f admet un nombre dérivé $f'(x)$ en x , **alors** la fonction est dite **dérivable sur** l'intervalle **I**.

Notation : la fonction dérivée est définie sur I et notée $f'(x)$

Fondamental — Propriété - tangente et nombre dérivé

- **Si** la fonction admet $f'(a)$ comme nombre dérivé en a, **alors** la courbe C_f admet une **tangente** en $(a\,;f(a))$ de **coefficient directeur** $f'(a)$.
- l'**équation** de la tangente est $y=\ f'(a)\times(x-a)+\ f(a)$

Complément — Déterminer une équation de droite



- par **lecture graphique** :
  - coefficient directeur $\mathbf{a}=\dfrac{\Delta \mathbf{y}}{\Delta \mathbf{x}}$ (ou $\mathbf{a}=\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{1}}$)

    par exemple ici : $a=\dfrac{2}{4}=0,5$ (ou $a=\dfrac{0,5}{1}$)
  - ordonnée à l'origine **b** (intersection droite et (axe y))

    par exemple ici : b=2
- par le **calcul - méthode 1** :
  - coefficient directeur $\mathbf{a}=\dfrac{\mathbf{y_B}-\mathbf{y_A}}{\mathbf{x_B}-\mathbf{x_A}}$

    par exemple ici : $a=\dfrac{4-3}{4-2}=0,5$
  - le point A appartient à la droite donc $\mathbf{y_A}=\mathbf{a}\times\mathbf{x_A}+\mathbf{b}$ et on résout l'équation (b inconnue)

    par exemple ici : $3=0,5\times 2+b$, donc $b=3-0,5\times 2=2$
- par le **calcul - méthode 2** :
  - le point A appartient à la droite donc $y_A=a\times x_A+b$

    le point B appartient à la droite donc $y_B=a\times x_B+b$

    et on résout un système d'équations : $\begin{cases}\mathbf{y_A} &= \mathbf{a}\times\mathbf{x_A}+\mathbf{b}\\ \mathbf{y_B} &= \mathbf{a}\times\mathbf{x_B}+\mathbf{b}\end{cases}$

    par exemple ici : $\begin{cases}3 &= a\times 2+b\\ 4 &= a\times 4+b\end{cases}$

2. fonction dérivée et étude de fonction

Fondamental — Fonctions dérivées des fonctions de référence

la fonction	$f(x) = m$ $(m \in \mathbb{R})$	$f(x) = mx$ $(m \in \mathbb{R})$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^n$ $(n \geq 2)$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $(n \geq 1)$	$f(x) = \sqrt{x}$
définie et dérivable pour tout $x \in$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$]0\,;+\infty[$
La fonction dérivée est :	$f'(x) = 0$	$f'(x) = m$	$f'(x) = 2x$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Rappel : $\mathbb{R}^*$ signifie l'ensemble des réels privé de {0} ou : $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$

Méthode — Dérivée de somme de fonction et de produit d'une fonction par un nombre réel

la fonction	$f(x)$	$g(x)$	$k \times f(x)$ $(k \in \mathbb{R})$	$f(x) + g(x)$
est définie et admet une dérivée définie pour $x \in$	I			
La fonction dérivée est :	$f'(x)$	$g'(x)$	$k \times f'(x)$	$f'(x) + g'(x)$

Méthode — Dérivée d'un produit et d'un quotient de fonction

la fonction	$u(x) \times v(x)$ expression simplifiée $u \times v$	$\frac{u(x)}{v(x)}$ expression simplifiée $\frac{u}{v}$
est définie et admet une dérivée définie pour $x \in$	I	I (si pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0/$)
La fonction dérivée est :	$u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$ expression simplifiée $u' \times v + u \times v'$	$\frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$ expression simplifiée $\frac{u'v - u \times v'}{v^2}$

Fondamental — Théorème des variations

Théorème

f est définie et dérivable sur I .

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante .
- Si $f'(x) = 0$, alors f est constante .
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante .

Théorème réciproque

f est définie et dérivable sur I .

- Si f est décroissante , alors $f'(x) \leq 0$.
- Si f est constante , alors $f'(x) = 0$.
- Si f est croissante , alors $f'(x) \geq 0$.

Méthode — Étude des variations d'une fonction

1. **vérifier** le domaine de définition et de dérivation de la fonction (f est définie et dérivable sur ...)
2. **Calculer** la fonction dérivée f'
3. **rechercher** le signe de la fonction dérivée
4. en déduire et **compléter** le tableau de variation (et de signe de la dérivée)

Fondamental — Théorèmes

f est une fonction définie et dérivable sur I .

Si f' s'annule et change de signe en x_0 **alors** f admet un extremum en x_0 .	**Si** f admet un extremum en x_0 **alors** $f'(x_0) = 0$.