1 Notion de primitive

Définition — **Primitive d'une fonction continue**

f est une fonction **continue** sur $[a\,;b]$ ($a,b\in\mathbb{R}$)

- La fonction F définie sur [a,b] est une **primitive de** f **si** pour tout réel $x\in[a\,;b]$ $F'(x)=f(x)$.

Remarque : les **primitives** sont *notées avec des lettres **MAJUSCULES***.

Fondamental — **Propriété (admise)**

Toute fonction continue sur un intervalle [a ;b] **admet une primitive** sur [a ;b].

Complément — **Une ou plusieurs primitives ? Propriété (admise)**

Si F est une primitive de f sur $[a\,;b]$ **alors toutes les primitives** sont les fonctions **définies** par $G(x)=F(x)+k$ où $k\in\mathbb{R}$.

- *remarque :* k peut être *n'importe quelle valeur réelle*.

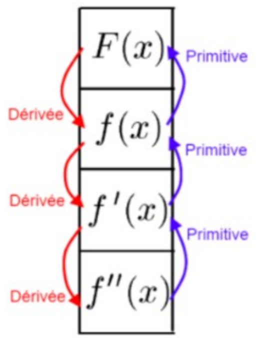
Complément — **Primitive prenant une valeur donnée en un point donné**

- f est une fonction continue sur $[a\,;b]$.
- x_0 est un réel tel que $x_0\in[a\,;b]$
- y_0 est un réel quelconque.

Il existe une **primitive unique** G de f sur $[a\,;b]$ **telle que** $G(x_0)=y_0$.

Remarque

- la **fonction** dérivée f' a comme primitive la fonction f (c'est **une** primitive).
- la **fonction** dérivée seconde f'' a comme **primitive** la fonction f' (c'est **une** primitive).



Exemple :

x^3
$3x^2$
$6x$
6

2 Déterminer les primitives

Fondamental — **Primitive de fonctions particulières**

une Primitive	$F(x)=m$	$F(x)=mx$	$F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$F(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$F(x)=e^x$
fonction	$f(x)=0$ $(m\in\mathbb{R})$	$f(x)=m$ $(m\in\mathbb{R})$	$f(x)=x^n$ $(n\geq 0)$	$f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ $(n\geq 2)$	$f(x)=e^x$

Attention, le tableau se lit en principe de bas en haut (Primitive)

Fondamental — **Propriété de calcul des primitives**

une Primitive	$F(x)$	$G(x)$	$k\times F(x)$	$F(x)+G(x)$
fonction	$f(x)$	$g(x)$	$k\times f(x)$ $(k\in\mathbb{R})$	$f(x)+g(x)$

Attention, le tableau se lit en principe de bas en haut (Primitive)

Fondamental — **D'autres primitives qu'on sait calculer**

une Primitive sur l'intervalle I	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	e^u
fonction	$u'\times u^n$ $n\in\mathbb{N}$	$\dfrac{u'}{u^n}$ $n>1$ et u ne s'annule pas sur I	$u'\times e^u$

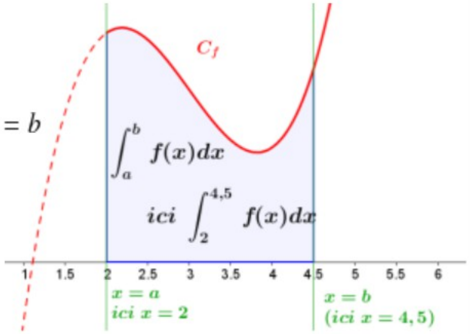
Attention, le tableau se lit en principe de bas en haut (Primitive)

3 Utiliser les primitives : intégrales

Définition — **Intégrale d'une fonction continue positive**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ ($[a < b]$), f une fonction **continue** et **positive** sur $[a\,;b]$ et C_f sa courbe représentative sur $[a\,;b]$ dans un repère $(O\,;I\,;J)$.

- On appelle **intégrale de f entre a et b** la **valeur de l'aire** (*en unité d'aire*) du domaine compris entre :
  - la courbe C_f.
  - l'axe des abscisses
  - les droites verticale d'équation $x = a$ et $x = b$
- Notation : $\int_a^b f(x)dx$
- *Exemple :* $\int_2^{4.5} f(x)dx$
- *Notations équivalentes :* $\int_2^{4.5} f(t)t$ *ou* $\int_2^{4.5} f(u)u$

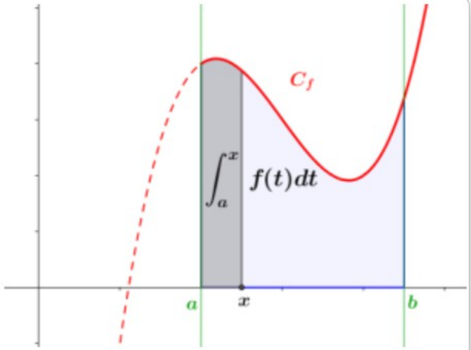


Lien entre primitive et intégrale

Définition

La primitive F de f telle que $F(a) = 0$ peut-être définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

- Dans le **cas particulier** d'une fonction f *continue et positive*, la primitive représente donc l'*aire de la surface située sous la courbe*.



Fondamental — **Application - calcul de la valeur d'une intégrale**

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ et F une primitive de f .

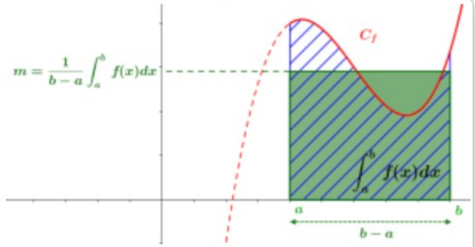
- $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Il est possible de vérifier la valeur d'une intégrale à la calculatrice :

Fondamental — **Valeur moyenne d'une fonction**

On appelle m la **valeur moyenne** d'une fonction calculée par $m = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

- elle correspond à la *hauteur d'un rectangle de largeur b-a dont l'aire est égale à celle définie par l'intégrale*.



propriétés des intégrales

Fondamental — **Opérations sur les intégrales**

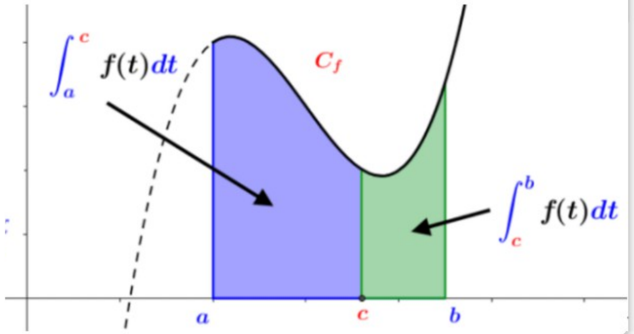
Soit $k \in \mathbb{R}$; f , g des fonctions continues sur un intervalle I ; $a, b, c \in I$.

Linéarité :

- $\int_a^b k \times f(x)dx = k \times \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Relation de Chasles :

- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$



Fondamental — **Positivité d'une intégrale**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$.

Propriété 1

- **Si** pour tout $x \in [a\,;b]$ $f(x) > 0$ **alors** $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Propriété 1

- **Si** pour tout $x \in [a\,;b]$ $f(x) \leq g(x)$

  alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.