Contrôle de connaissances	*Chapitre 6 – suites* *Nom :*	*TES2 **

À l'automne 2010, Claude achète une maison à la campagne ; il dispose d'un terrain de 1 500 m² entièrement engazonné. Mais tous les ans, 20 % de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50m² et la remplace par du gazon.

Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n la surface en m^2 de terrain engazonné au bout de n années, c'est-à-dire à l'automne $2010 + n$. On a donc $u_0 = 1500$.

1) Calculer u_1.
$u_1 = 0,8 \times 1500 + 50 = \underline{1250}$

2) Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$.
On a une évolution de coefficient 0,8 (baisse de 20%) donc $\underline{0,8u_n}$ suivi d'une addition de 50 (augmentation de 50) donc $u_{n+1} = \underbrace{0,8 \times u_n}_{\text{évolution de } 0,8} \underbrace{+50}_{\text{augmentation de } 50}$

On considère la suite (v_n) définie pour tout nombre entier naturel n par : $v_n = u_n - 250$.

3) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
Il faut donc montrer que $v_{n+1} \stackrel{?}{=} 0,8 \times v_n$.

On exprime	On exprime
$v_{n+1} = u_{n+1} - 250$ $= \underbrace{0,8 \times u_n + 50}_{u_{n+1} \text{ voir énoncé}} - 250$ $= \underline{0,8 \times u_n - 200}$	$0,8 \times v_n = 0,8 \times (u_n - 250)$ $= 0,8 \times u_n - 0,8 \times 250$ $= \underline{0,8 \times u_n - 200}$

Donc $v_{n+1} = 0,8 \times v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \underline{0,8}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 250 = \underline{1250}$

4) Exprimer v_n en fonction de n.
On en déduit que $v_n = v_0 \times q^n = \underline{1250 \times 0,8^n}$
En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 250 + 1250 \times 0,8^n$.
Comme $v_n = u_n - 250$ alors $u_n = v_n + 250 = \underline{250 + 1250 \times 0,8^n}$

5) Quelle est la surface de terrain engazonné au bout de 4 années ?
C'est $u_4 = 250 + 1250 \times 0,8^4 = \underline{762}$, donc 762 m².

6) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $250 + 1250 \times 0,8^n < 500$
$u_7 \approx \underline{512 > 500}$ et $u_8 \approx \underline{459 < 500}$, donc la valeur $\underline{n = 8}$.
Interpréter le résultat obtenu.
La huitième année, on aura moins de 500m² de gazon.

7) Compléter l'algorithme fourni ci-dessous pour qu'il affiche la solution obtenue à la question précédente.

8) Calculer la limite de la suite (u_n).
on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,8^n) = 0$ car c'est une suite géométrique de raison $0 < q < 1$
Donc
$$\lim_{n\to+\infty} (\underbrace{\underbrace{1250}_{1250} \times \underbrace{0,8^n}_{0}}_{1250\times 0=0} + \underbrace{250}_{250}) = 0 + 250 = \underline{250}$$

Claude est certain que les mauvaises herbes ne peuvent envahir la totalité de son terrain.

9) A-t-il raison ? Justifier la réponse.
Oui car la suite approchera sans l'atteindre la valeur de 250.

Annexe à rendre avec la copie

1) Initialisation
2) u prend la valeur 1 500
3) n prend la valeur 0
4) Traitement
5) Tant que $\underline{u \geqslant 500}$ faire
6) u prend la valeur $\underline{u \times 0,8 + 50}$
7) n prend la valeur $\underline{n + 1}$
8) Fin Tant que
9) Sortie
10) Afficher n

À l'automne 2010, Claude achète une maison à la campagne ; il dispose d'un terrain de 1 500 m² entièrement engazonné. Mais tous les ans, 20 % de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 100m² et la remplace par du gazon.

Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n la surface en m^2 de terrain engazonné au bout de n années, c'est-à-dire à l'automne $2010 + n$. On a donc $u_0 = 1500$.

1) Calculer u_1.
$u_1 = 0,8 \times 1500 + 100 = \underline{1300}$

2) Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8u_n + 100$.
On a une évolution de coefficient 0,8 (baisse de 20%) donc $\underline{0,8u_n}$ suivi d'une addition de 100 (augmentation de 100) donc $u_{n+1]} = \underbrace{0,8 \times u_n}_{\text{évolution de } 0,8} \underbrace{+100}_{\text{augmentation de } 100}$

On considère la suite (v_n) définie pour tout nombre entier naturel n par : $v_n = u_n - 500$.

3) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
Il faut donc montrer que $v_{n+1} \overset{?}{=} 0,8 \times v_n$.

On exprime $v_{n+1} = u_{n+1} - 500$ $= \underbrace{0,8 \times u_n + 100}_{u_{n+1} \text{ voir énoncé}} - 500$ $= \underline{0,8 \times u_n - 400}$	On exprime $0,8 \times v_n = 0,8 \times (u_n - 500)$ $= 0,8 \times u_n - 0,8 \times 500$ $= \underline{0,8 \times u_n - 400}$

Donc $v_{n+1} = 0,8 \times v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \underline{0,8}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 500 = \underline{1000}$

4) Exprimer v_n en fonction de n.
On en déduit que $v_n = v_0 \times q^n = \underline{1000 \times 0,8^n}$
En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 500 + 1000 \times 0,8^n$.
Comme $v_n = u_n - 500$ alors $u_n = v_n + 500 = \underline{500 + 1000 \times 0,8^n}$

5) Quelle est la surface de terrain engazonné au bout de 5 années ?
C'est $u_5 = 500 + 1000 \times 0,8^5 = \underline{828}$, donc 828 m².

6) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $500 + 1000 \times 0,8^n < 600$
$u_{10} \approx \underline{607 > 600}$ et $u_{11} \approx \underline{586 < 600}$, donc la valeur $\underline{n = 8}$.
Interpréter le résultat obtenu.
La onzième année, on aura moins de 600m² de gazon.

7) Compléter l'algorithme fourni ci-dessous pour qu'il affiche la solution obtenue à la question précédente.

8) Calculer la limite de la suite (u_n).
on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,8^n) = 0$ car c'est une suite géométrique de raison $0 < q < 1$
Donc
$\lim\limits_{n \to +\infty} (\underbrace{\underbrace{1000}_{1000} \times \underbrace{0,8^n}_{0}}_{1000 \times 0 = 0} + \underbrace{500}_{500}) = 0 + 500 = \underline{500}$

Claude est certain que les mauvaises herbes ne peuvent envahir la totalité de son terrain.

9) A-t-il raison ? Justifier la réponse.
Oui car la suite approchera sans l'atteindre la valeur de 500.

Annexe à rendre avec la copie

Initialisation
u prend la valeur 1 500
n prend la valeur 0
Traitement
Tant que $\underline{u \geqslant 600}$ faire
u prend la valeur $\underline{u \times 0,8 + 100}$
n prend la valeur $\underline{n + 1}$
Fin Tant que
Sortie
Afficher n