Dans une ville, un nouveau lycée vient d'ouvrir ses portes et accueille pour sa première rentrée 500 élèves. D'une année sur l'autre, le proviseur du lycée prévoit une perte de 30 % de l'effectif et l'arrivée de 300 nouveaux élèves.

On modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre d'élèves inscrits au lycée pour l'année $2013 + n$, avec n entier naturel. On a donc $u_0 = 500$.

1) **a.** Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2014.
évolution de coefficient 0,7 suivi d'une addition de 300, donc $500 \times 0,7 + 300 = \underline{650}$
b. Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2015.
évolution de coefficient 0,7 suivi d'une addition de 300, donc $650 \times 0,7 + 300 = \underline{755}$

2) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 300$.
On a une évolution de coefficient 0,7 (baisse de 30%) donc $\underline{0,7u_n}$ suivi d'une addition de 300 (augmentation de 300) donc $u_{n+1}] = \underbrace{0,7 \times u_n}_{évolution\ de\ 0,7} \underbrace{+300}_{augmentation\ de\ 300}$

3) On souhaite, pour un entier n donné, afficher tous les termes de la suite (u_n) du rang 0 au rang n.

Lequel des trois algorithmes suivants permet d'obtenir le résultat souhaité ? Justifier.
C'est l'algorithme 2 :

- Algorithme 1 : n'affiche pas le dernier terme u_n (le dernier calcul de $0,7 \times u + 300$ n'est pas affiché).
- Algorithme 3 : n'affiche pas tous les termes, seul le dernier calcul de $0,7 \times u + 300$ est affiché.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
Variables : n, i entier naturel, u nombre réel **Début algorithme** Lire n i prend la valeur 0 u prend la valeur 500 Tant que $i \leqslant n$ Afficher u u prend la valeur $0,7 \times u + 300$ i prend la valeur $i + 1$ Fin tant que **Fin algorithme**	**Variables :** n, i entier naturel, u nombre réel **Début algorithme** Lire n i prend la valeur 0 u prend la valeur 500 Tant que $i \leqslant n$ Afficher u u prend la valeur $0,7 \times u + 300$ i prend la valeur $i + 1$ Fin tant que Afficher u **Fin algorithme**	**Variables :** n, i entier naturel, u nombre réel **Début algorithme** Lire n i prend la valeur 0 u prend la valeur 500 Tant que $i \leqslant n$ u prend la valeur $0,7 \times u + 300$ i prend la valeur $i + 1$ Fin tant que Afficher u **Fin algorithme**

4) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 1000$

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,7$ dont on précisera le premier terme v_0.

Il faut donc montrer que $v_{n+1} \stackrel{?}{=} 0,7 \times v_n$.

On exprime	On exprime
$v_{n+1} = u_{n+1} - 1000$ $= \underbrace{0,7 \times u_n + 300}_{u_{n+1}\text{ voir énoncé}} - 1000$ $= \underline{0,7 \times u_n - 700}$	$0,7 \times v_n = 0,7 \times (u_n - 1000)$ $= 0,7 \times u_n - 0,7 \times 1000$ $= \underline{0,7 \times u_n - 700}$

Donc $v_{n+1} = 0,7 \times v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \underline{0,7}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1000 = \underline{-500}$

b. Donner l'expression de la suite (v_n) en fonction de n.
On en déduit que $v_n = v_0 \times q^n = \underline{-500 \times 0,7^n}$

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = -500 \times 0,7^n + 1000$.
Comme $v_n = u_n - 1000$ alors $u_n = v_n + 1000 = \underline{-500 \times 0,7^n + 1000}$

d. Déterminer la limite de la suite (u_n)

on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,7^n) = 0$ car c'est une suite géométrique de raison $0 < q < 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (\underbrace{\underbrace{-500}_{-500} \times \underbrace{0,7^n}_{0}}_{-500 \times 0 = 0} + \underbrace{1000}_{1000}) = 0 + 1000 = \underline{1000}$

e. Interpréter le résultat précédent.

Le lycée devrait approcher des <u>mille élèves</u>.

5) **a.** Déterminer la plus petite valeur de n qui vérifie $u_n \geqslant 990$.

$u_{10} \approx 986 < 990$ et $u_11 \approx 990,11 \geqslant 990$ donc $\underline{n = 11}$.

b. Interpréter le résultat trouvé précédemment.

<u>A partir de la 11ème année, le lycée aura plus de 990 élèves.</u>

Dans une ville, un nouveau lycée vient d'ouvrir ses portes et accueille pour sa première rentrée 500 élèves. D'une année sur l'autre, le proviseur du lycée prévoit une perte de 20 % de l'effectif et l'arrivée de 200 nouveaux élèves.

On modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre d'élèves inscrits au lycée pour l'année $2013+n$, avec n entier naturel. On a donc $u_0 = 500$.

6) **a.** Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2014.
évolution de coefficient 0,7 suivi d'une addition de 200, donc $500 \times 0,8 + 200 = \underline{600}$
b. Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2015.
évolution de coefficient 0,7 suivi d'une addition de 200, donc $600 \times 0,8 + 200 = \underline{680}$

7) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,8u_n + 200$.
On a une évolution de coefficient 0,8 (baisse de 20%) donc $\underline{0,8 \times u_n}$ suivi d'une addition de 200 (augmentation de 200) donc $u_{n+1]}= \underbrace{0,8 \times u_n}_{\textit{évolution de } 0,8} \quad \underbrace{+200}_{\textit{augmentation de } 200}$

8) On souhaite, pour un entier n donné, afficher tous les termes de la suite (u_n) du rang 0 au rang n.

Lequel des trois algorithmes suivants permet d'obtenir le résultat souhaité ? Justifier.
C'est l'algorithme 3 :

- Algorithme 1 : n'affiche pas le dernier terme u_n (le dernier calcul de $0,8 \times u + 200$ n'est pas affiché).
- Algorithme 2 : n'affiche pas tous les termes, seul le dernier calcul de $0,8 \times u + 200$ est affiché.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
Variables : n, i entier naturel, u nombre réel **Début algorithme** Lire n u prend la valeur 500 Tant que $i \leqslant n$ Afficher u u prend la valeur $0,8 \times u + 200$ i prend la valeur $i+1$ Fin tant que **Fin algorithme**	**Variables :** n, i entier naturel, u nombre réel **Début algorithme** Lire n u prend la valeur 500 Tant que $i \leqslant n$ u prend la valeur $0,8 \times u + 200$ i prend la valeur $i+1$ Fin tant que Afficher u **Fin algorithme**	**Variables :** n, i entier naturel, u nombre réel **Début algorithme** Lire n u prend la valeur 500 Tant que $i \leqslant n$ Afficher u u prend la valeur $0,8 \times u + 200$ i prend la valeur $i+1$ Fin tant que Afficher u **Fin algorithme**

9) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 1000$

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ dont on précisera le premier terme v_0.

Il faut donc montrer que $v_{n+1} \stackrel{?}{=} 0,8 \times v_n$.

On exprime	On exprime
$v_{n+1} = u_{n+1} - 1000$ $= \underbrace{0,8 \times u_n + 200}_{u_{n+1} \text{ voir énoncé}} - 1000$ $= \underline{0,8 \times u_n - 800}$	$0,8 \times v_n = 0,8 \times (u_n - 1000)$ $= 0,8 \times u_n - 0,8 \times 1000$ $= \underline{0,8 \times u_n - 800}$

Donc $v_{n+1} = 0,8 \times v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \underline{0,8}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1000 = \underline{-500}$

b. Donner l'expression de la suite (v_n) en fonction de n.
On en déduit que $v_n = v_0 \times q^n = \underline{-500 \times 0,8^n}$

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = -500 \times 0,8^n + 1000$.
Comme $v_n = u_n - 1000$ alors $u_n = v_n + 1000 = \underline{-500 \times 0,8^n + 1000}$

d. Déterminer la limite de la suite (u_n)

on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,8^n)=0$ car c'est une suite géométrique de raison $0<q<1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\underbrace{\underbrace{-500}_{-500}\times\underbrace{0,8^n}_{0}}_{-500\times0=0}+\underbrace{1000}_{1000})=0+1000=\underline{1000}$

e. Interpréter le résultat précédent.

Le lycée devrait approcher des mille élèves.

10) a. Déterminer la plus petite valeur de n qui vérifie $u_n \geqslant 990$.

$u_{17}\approx 989<990$ et $u_{18}\approx 991\geqslant 990$ donc $\underline{n=18}$.

b. Interpréter le résultat trouvé précédemment.

A partir de la 18ème année, le lycée aura plus de 990 élèves.