Un opérateur de téléphonie mobile constate que, chaque année, il perd 8 % de ses précédent abonnés et que, par ailleurs, il gagne 3 millions de nouveaux abonnés.

En 2013 le nombre d'abonnés est de 20 millions.

On s'intéresse au nombre d'abonnés, en millions, pour l'année $2013+n$. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n , par :

- $\begin{cases} u_0 = 20 \\ u_{n+1} = 0,92u_n + 3 \end{cases}$

Le terme u_n donne une estimation du nombre d'abonnés pour l'année $2013+n$.

Partie A

Question 1

- **a.** En utilisant cette modélisation, l'opérateur décide d'arrondir les résultats 10^{-3} . A quoi correspond ce choix d'arrondi ?
- **b.** Déterminer le nombre d'abonnés en 2014 et en 2015.

a) u_n en million $\Rightarrow$ arrondi à 10^{-3} correspond au millier d'abonnés.

1,000,000

$\uparrow$ 1 million $\quad \uparrow$ arrondi 10^{-3}

b) $2014 \to u_1 = 0,92 \times u_0 + 3$

$= 0,92 \times 20 + 3$

$= \underline{21,4}$

$2015 \to u_2 = 0,92 \times u_1 + 3$

$= 0,92 \times 21,4 + 3$

$= \underline{22,688}$

$$\begin{cases} u_0 = 20 \\ u_{n+1} = 0,92u_n + 3 \end{cases}$$

Question 2

On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 37,5$ pour tout entier naturel n .

- Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,92. Préciser son premier terme.

$v_{n+1} \overset{?}{=} 0,92 v_n$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 37,5$

$= 0,92u_n + 3 - 37,5$

$= \underline{0,92u_n - 34,5}$

$0,92 \times v_n = 0,92 \times (u_n - 37,5)$

$= 0,92 \times u_n - 0,92 \times 37,5$

$= \underline{0,92 \times u_n - 34,5}$

$=$

Donc $v_{n+1} = 0,92 \times v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,92

$v_0 = u_0 - 37,5$

$= 20 - 37,5$

$= \underline{-17,5}$

Question 3

- Exprimer v_n en fonction de n .
- En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = -17,5 \times 0,92^n + 37,5$.

• (v_n) suite géométrique $v_0 = -17,5$ et $q = 0,92$.

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{-17,5 \times 0,92^n}$$

•

$$v_n = u_n - 37,5$$

donc $u_n = v_n + 37,5$

$$= \boxed{-17,5 \times 0,92^n + 37,5}$$

Question 4

Déterminer le nombre d'abonnés en millions en 2020. Arrondir les résultats à 10^{-3} .

$$2020 \Rightarrow u_7 = -17{,}5 \times 0{,}92^7 + 37{,}5$$

$$= \underline{27{,}738}$$

Question 5

- Déterminer la limite de la suite (u_n) .

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{-17{,}5}_{\substack{\text{Suite } c^{te} \\ -17{,}5}} \times \underbrace{0{,}92^n}_{\substack{\text{Suite géom pos} \\ 0<q<1 \\ 0}} + \underbrace{37{,}5}_{\substack{\text{Suite } c^{te} \\ 37{,}5}} = 0 + 37{,}5 = 37{,}5$$

$$-17{,}5 \times 0 = \underline{0}$$

Question 6

- L'opérateur peut-il espérer dépasser 30 millions d'abonnés ?

oui, il peut même espérer approcher de 37,5 millions d'abonnés.

↳ limite

(37,5 > 30)

<u>ou</u>

$u_{11} \simeq 30,5$ millions

$u_{11} > 30 \Rightarrow$ <u>oui</u>.

Partie B

Compte tenu des investissements, l'opérateur considère qu'il réalisera des bénéfices lorsque le nombre d'abonnés dépassera 25 millions.

Question 1

$\Rightarrow N$

Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer le nombre d'années nécessaires à partir de 2013 pour que l'opérateur fasse des bénéfices.

Variables :	N un nombre entier naturel non nul U un nombre réel
Traitement :	Affecter à U la valeur 20 Affecter à N la valeur 0 Tant que ... $U < 25$ • affecter à U la valeur 0,92 × U + 3 • affecter à N la valeur N + 1 Fin Tant que
Sortie :	Afficher .... N

Question 2

En quelle année l'opérateur fera-t-il des bénéfices pour la première fois ?

$u_5 = 25,9 > 25 \Rightarrow$ en $2013 + 5 = \underline{2018}$