Un opérateur de téléphonie mobile constate que, chaque année, il perd 8 % de ses précédent abonnés et que, par ailleurs, il gagne 3 millions de nouveaux abonnés.

En 2013 le nombre d'abonnés est de 20 millions.

On s'intéresse au nombre d'abonnés, en millions, pour l'année $2013+n$. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n , par :

- $\begin{cases} u_0 = 20 \\ u_{n+1} = 0,92u_n + 3 \end{cases}$

Le terme u_n donne une estimation du nombre d'abonnés pour l'année $2013+n$.

Partie A

Question 1

- **a.** En utilisant cette modélisation, l'opérateur décide d'arrondir les résultats 10^{-3} . A quoi correspond ce choix d'arrondi ?
- **b.** Déterminer le nombre d'abonnés en 2014 et en 2015.

a) u_n en million d'abonnés $\longrightarrow$ arrondi 10^{-3} $\Rightarrow$ millier d'abonnés

1 000,000

10^{-3} millions

b) 2014 $u_1 = 0,92 \times u_0 + 3$

$= 0,92 \times 20 + 3 = 21,4$

$u_2 = 0,92 \times u_1 + 3$

$= 0,92 \times 21,4 + 3 = 22,688$

$$\begin{cases} u_0 = 20 \\ u_{n+1} = 0,92u_n + 3 \end{cases} \quad (v_n) \text{ par } v_n = u_n - 37,5$$

$v_0 = u_0 - 37,5$
$= 20 - 37,5$
$= -17,5$

Question 2

On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 37,5$ pour tout entier naturel n .

- Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,92. Préciser son premier terme.

q

$v_{n+1} \overset{?}{=} 0,92\, v_n$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 37,5$
$= 0,92u_n + 3 - 37,5$
$= 0,92u_n - 34,5$

$0,92 \times v_n = 0,92 \times (u_n - 37,5)$
$= 0,92 \times u_n - 0,92 \times 37,5$
$= 0,92 \times u_n - 34,5$

$=$

donc $v_{n+1} = 0,92 \times v_n$
donc (v_n) est une suite géométrique raison 0,92

Question 3

- Exprimer v_n en fonction de n . → terme général.
- En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = -17,5 \times 0,92^n + 37,5$.

Question 4

- v_n suite géométrique $q = 0,92$ $v_0 = -17,5$.

donc $v_n = v_0 \times q^n = \boxed{-17,5 \times 0,92^n}$

- $v_n = u_n - 37,5$.

donc $u_n = v_n + 37,5$

$= \boxed{-17,5 \times 0,92^n + 37,5}$.

Question 4

Déterminer le nombre d'abonnés en millions en 2020. Arrondir les résultats à 10^{-3} .

$$u_7 = -17{,}5 \times 0{,}92^7 + 37{,}5$$
$$= \underline{27{,}738}$$

Question 5

- Déterminer la limite de la suite (u_n) .

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{-17{,}5}_{\text{suite cte}} \times \underbrace{0{,}92^n}_{\text{suite géo. pas } 0<q<1} + \underbrace{37{,}5}_{\text{suite cte}} = 37{,}5$$

$$\underbrace{\underbrace{-17{,}5 \times 0}_{0} + 37{,}5}_{}$$

Question 6

- L'opérateur peut-il espérer dépasser 30 millions d'abonnés ?

~~1ère façon~~ de répondre

Oui, il peut m̂ espérer approcher les 37,5 millions d'abonnés.

2ème façon

$u_{11} \approx 30{,}5$ donc à partir de la 11ème année

il dépasse 30 millions.

Compte tenu des investissements, l'opérateur considère qu'il réalisera des bénéfices lorsque le nombre d'abonnés dépassera 25 millions.

Question 1

Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer le nombre d'années nécessaires à partir de 2013 pour que l'opérateur fasse des bénéfices

Variables :	N un nombre entier naturel non nul U un nombre réel
Traitement :	Affecter à U la valeur 20 Affecter à N la valeur 0 Tant que ...$U < 25$ • affecter à U la valeur 0,92 × U + 3 • affecter à N la valeur N + 1 Fin Tant que
Sortie :	Afficher ...N

Question 2

En quelle année l'opérateur fera-t-il des bénéfices pour la première fois ?

$u_5 = 25,8$ $u_5 > 25$ donc à partir de $2013+5$
$= 2018.$